تدریس توابع مثلثاتی؛ درس‌های برگرفته از

تحقیق

کیت وبر، استادیار آموزش ریاضی دانشگاه راتگرز، نیوبرانزویک، نیوجرسی و عضو مرکز مرتبط کردن یافته‌های پژوهشی و تدریس
مترجمان: فرید حسینی، دبیر ریاضی مریوان
حمید فرهادی، دبیر ریاضی شهرستان سروآباد

اشاره

این بخش، شامل مقاله‌هایی است که یافته‌های پژوهشی را به گوش مخاطب معلم و آموزشگر ریاضی می‌رساند. مقاله‌هایی که در این بخش چاپ می‌شوند، باید ارتباط روشنی بین پژوهش و تدریس برقرار کنند. تصور ما از پژوهش، وسیع است؛ این پژوهش‌ها شامل یادگیری دانش‌آموزان، تفکر معلمان، نقش زبان در کلاس درس ریاضی، سیاست‌گذاری و اجرا در آموزش ریاضی، تکنولوژی در کلاس درس ریاضی، مطالعه‌های تطبیقیِ بین‌المللی و بیشتر از این‌هاست. مقاله‌های این بخش، بر ایده‌های مهمی متمرکز است و دربرگیرندهٔ متن‌های دقیق و روشن است تا بتوان از این طریق، یافته‌های پژوهشی برای معلمان در کلاس درس، معنا و مفهوم پیدا کند. هدف ما این است که این مقاله‌ها، بهانه‌ای برای بحث و گفتگو در دپارتمان و بین معلمان ریاضی دورهٔ متوسطه در گردهمایی‌های ایشان است. برای اطلاعات بیشتر، با افراد زیر تماس بگیرید.

Libby Knott, knott@mso.umt.edu
University of Montana, Missoula, MT 59812
Thomas A. Evitts, taevit@ship.edu
Shippensburg University, Shippensburg, PA 17257

مثلثات موضوع مهمی در برنامهٔ درسی ریاضیات دبیرستان است، به‌طوری‌که از همان ابتدا، یکی از موضوع‌های برنامهٔ درسی ریاضیات دبیرستانی بوده و به صورت معناداری، استدلال‌های نموداری، هندسی و جبری را به هم پیوند می‌دهد. بدین سبب، مثلثات می‌تواند یک موضوع مهم قبل از آموزش حسابان در مدرسه باشد، همچنین می‌تواند پیش‌نیاز مناسبی برای درس‌های سال اول دانشگاه در ارتباط با فیزیک نیوتنی، معماری، نقشه‌برداری و مهندسی باشد. ولی متأسفانه، بسیاری از دانش‌آموزان دبیرستانی، با این نوع استدلال‌ها، مأنوس نیستند (بلَکت و تال[1]، ۱۹۹۱) و برای آن‌ها از همان ابتدا، یادگیری توابع مثلثاتی توأم با دشواری‌هایی است.

مثلثات دانش‌آموزان را با چالش‌هایی مواجه می‌کند که قبلاً تجربه نکرده بودند: آن‌ها باید نمودارهای مثلث‌ها را با روابط عددی مرتبط کنند و با نمادهای موجود در این روابط، دست‌ورزی کنند. علاوه بر این‌ها به‌طور معمول، توابع مثلثاتی جزو اولین توابعی هستند که دانش‌آموزان، نمی‌توانند مقادیر آن‌ها را مستقیماً با انجام اعمال حسابی، به‌دست آورند. با وجود اهمیت مثلثات و دشواری‌های بالقوه‌ای که دانش‌آموزان در یادگیری آن دارند، تحقیقات نسبتاً اندکی در این حوزه، انجام شده است. این مقاله، درس‌های برگرفته شده از تحقیق‌هایی است که به بررسی یادگیری و تدریس توابع مثلثاتی پرداخته‌اند (وبر، ۲۰۰۵). این تحقیق، مشکلاتی را که

دانش‌آموزان در درک توابع مثلثاتی دارند، ارائه می‌دهد و راهبردهای امتحان شده‌ای را برای تدریس مثلثات پیشنهاد می‌کند تا به دانش‌آموزان، در رفع مشکلات یادگیری مثلثات، کمک کند.

کلید واژه‌ها: توابع مثلثاتی، تدریس مثلثات

توابع مثلثاتی به‌عنوان «نسبت» و «تابع»

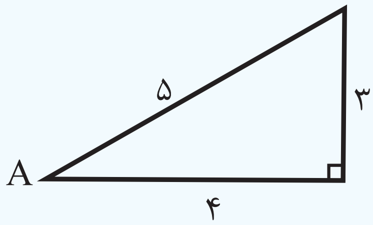
منظور از درک یک تابع مثلثاتی چیست؟ دقیقاً مانند عملیات «محاسبهٔ جذر یک عدد یا محاسبهٔ مکعب آن» که می‌توان آن‌ها را اعمالی تصور کرد که روی اعداد اعمال می‌شوند، واژه‌های «سینوس، کسینوس و تانژانت» را نیز می‌توان اعمالی تصور کرد که روی زاویه‌ها اعمال می‌شوند.

توابع مثلثاتی را می‌توان از دو جنبه مورد بررسی قرار داد. اول به‌عنوان نسبت‌هایی که می‌توان از یک مثلث قائم‌الزاویه برچسب‌گذاری شده یافت.

مثلاً، دانش‌آموزان می‌توانند از «درک- نسبت» توابع مثلثاتی، برای یافتن $\sin(A) = \frac{۳}{۵}$ استفاده کنند (شکل ۱).

دانش‌آموزان به کمک «درک- نسبت» از سینوس و کسینوس و با استفاده از ماشین‌حساب، قادرند طول‌های مجهول (a,b) از مثلث داده شده را بیابند (شکل ۲). واضح است که چنین درکی از مثلثات، مفید و کاربردی است. چه بسا برای حل مسائل کلامی گوناگون و انجام تکلیف‌های دیگر، کافی باشد. به‌عنوان مثال، یافتن مجموع بردارها در فیزیک به این نوع استدلال مثلثاتی نیازمند است. با این حال، «درک- نسبت» نیز محدود است. «اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای» بر این نکته تأکید دارد که درک یک عمل، شامل توانایی تخمین نتیجه‌ای از آن عمل نیز هست (شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا، ۲۰۰۰، صص. ۳۲ و ۳۳). به‌عنوان نمونه، درک کسرها مستلزم دانستن این است که $\frac{۱۳}{۱۲} + \frac{۷}{۸}$، تقریباً برابر دو است. زیرا هر کسر، تقریباً برابر یک است.

«درک- نسبت» به خودی خود، دانش‌آموزان را قادر نمی‌کند $\sin ۱۵$ را تقریب بزنند. زیرا با این رویکرد، تنها زمانی می‌توان آن را یافت که دو ضلع یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویهٔ ۱۵، داده شده باشد. همچنین درک سینوس به‌عنوان نسبت، دانش‌آموزان را قادر نمی‌کند که تعیین کنند در کدام ربع، سینوس صعودی است یا بتوانند نمودار $\sin ۲x$ را رسم کنند. در حقیقت، بسیاری از مسائل مربوط به حسابان مانند تعیین مشتق $\sin x$، با تنها درک نسبیتی از مثلثات، چندان بامعنی نیستند.



شکل ۱: یک مثلث قائم‌الزاویه نام‌گذاری شده

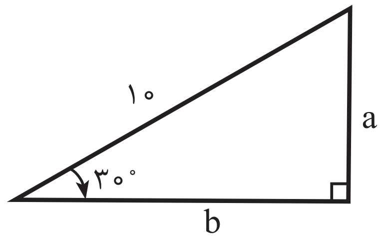
به‌خصوص دانش‌آموزان برای انجام بعضی از تکلیف‌های مثلثات، به درک تابعی از مثلثات، نیاز دارند (وبر، ۲۰۰۵). به این معنا که برای فهمیدن اعمال مثلثاتی مانند سینوس، باید آن را فرایندی تصور کنند که هر زاویه به‌عنوان یک ورودی در نظر گرفته شده و نگاشت آن، یک عدد حقیقی می‌شود.

دانش‌آموزان برای درک یک عمل مثلثاتی به‌عنوان تابع، نیازمند درک فرایندی هستند که از آن، برای محاسبهٔ مقدار تابع هر زاویه داده شده، استفاده کنند. آن‌ها باید قادر باشند نتیجهٔ تقریبی آن روش را تخمین بزنند و در مورد ویژگی‌های نتیجه عمل استدلال کنند، بدون اینکه در واقع، گام‌های فرایند را انجام دهند.

تدریس سنتی عملیات مثلثاتی

اغلب در آموزش رویه‌ای مثلثات، مهارت‌های مداد-کاغذی به مثابهٔ درک عمیق آن تصور شده است (هرش، وِینهولد و نیکولز[2]، ۱۹۹۱). بررسی از چندین کتاب درسی جبر، مثلثات و هندسه پر استفاده دبیرستانی نشان داد که اعمال مثلثاتی، ابتدا به‌عنوان «نسبت» تدریس می‌شود (به‌عنوان نمونه در یک مثلث نامگذاری شده، $\sin\alpha$ به‌صورت $\frac{y}{r}$ یا به‌صورت «مقابل» بر «وتر» تعریف می‌شود. سپس از دانش‌آموزان خواسته می‌شود تا به کمک نسبت‌ها، تکلیف‌هایی مانند مسائل پیشنهادی در شکل‌های (۱) و (۲) را انجام دهند و بعد، مسائل کلامی را حل کنند (هالووِل، شولتز و اِلیس[3]، ۱۹۹۷).

در این کتاب‌ها، بعد از اینکه بخش‌های زیادی به این امر اختصاص داده شده، آن‌گاه مدل دایرهٔ واحد توابع مثلثاتی، معرفی می‌شود. در این مرحله، از دانش‌آموزان خواسته شده که اعمال یک فرایند را برای یافتن سینوس و کسینوس یک زاویهٔ خاص، «تجسم کنند» (مانند دوران به اندازهٔ r واحد روی دایرهٔ واحد و یافتن عرض و طول نقطهٔ توقف.)



شکل ۲: یک مثلث قائم‌الزاویه با یک زاویه و یک ضلع داده شده و دو ضلع مجهول

بـــا این حال، به دانش‌آمـــوزان فرصت به کار بردن فرایند داده نشده است.

تمرین‌های این کتاب‌ها، به ندرت نیازمند فرایندی همراه با درک عملیات مثلثاتی است و در عوض، بیشتر آن‌ها نیازمند درک مفهوم «نسبت» از اعمال مثلثاتی، یا به کار بردن تکنیک‌های جبری هستند. بدین سبب بعضی محققان خاطرنشان ساخته‌اند که تدریس مثلثات مبتنی بر مفهوم «نسبت»، بر درک توابع مثلثاتی به‌عنوان نسبت، تأکید می‌کند و دانش‌آموزان را قادر نمی‌سازد تا آن‌ها عملیات مثلثاتی را به‌عنوان تابع درک کنند (کِندال و استیسی[۴]، ۱۹۹۷).

تأثیر تدریس سنتی بر درک دانش‌آموزان از عملیات مثلثاتی

برای بررسی فهم دانش‌آموزان از عملیات مثلثاتی، مطالعه‌ای در یک کلاس با ۳۱ دانش‌آموز انجام دادم که در حال اتمام یک درس پیش‌نیاز در یک مؤسسهٔ آموزش عالی بودند. من از دانشـــجویان خواستم که بدون استفاده از ماشین‌حساب، در یک آزمون شرکت کنند. سپس چهار نفر از آن‌ها را برای مصاحبه دعوت کردم. معلم کلاس که در مطالعه دخیل نبود، تدریس خود را سنتی توصیف کرد و اظهار نمود که بخش‌های زیادی از کتاب درســـی را به صورت ســـخنرانی و با تأکید بر گســـترش توانایی‌های رویه‌ای دانشجویان- همان‌طور که کتاب درســـی بر آن روال تنظیم شده- تدریس کرده اســـت. منبع تدریس مدرس این درس، توسط لِیال، هورنزبی و اشنایدر[۵] (۲۰۰۱) تألیف شده و ساختارش مشابه کتاب‌های متداولی بود که به آن‌ها اشاره شد.

نتایـــج کامـــل و روش انجام این مطالعـــه، در وبر (۲۰۰۵) آمده است. هدف این مقاله، نشان دادن فهم محدود دانش‌آموزان از توابع مثلثاتی، پس از اتمام یک نیم سال درس پیش‌نیاز مثلثات است.

دو سؤال از آن‌هایی که پرسیده شد چنین بود:

۱. $\cos ۳۴۰$ را تقریب بزنید.

۲. برای کدام مقادیر x، $\sin x$ نزولی است؟ چرا؟

تنها شش نفر از ۳۱ دانشجوی این کلاس، توانستـند $\cos ۳۴۰$ را عددی بین نیم و یک برآورد کنند. نه نفر نیز به درستی بیان کردند که $\sin x$ برای $۹۰ < x < ۲۷۰$، نزولی اســـت و شش نفر هم توضیح قانع‌کننده‌ای برای درستی این مطلب ارائه دادند. نتایج این مطالعه نشان داد که این دانشجویان، در درک توابع مثلثاتی با مشکل مواجه بودند.

مصاحبه با زیرمجموعه‌ای از دانشجویان، برخی از دلایل این مشکل را آشـــکار نمود. در زیر، بخش‌هایی از متن‌های پیاده شده مصاحبه‌ها را ملاحظه می‌کنید (اسامی همهٔ دانشجویان، مستعار است).

مصاحبه‌کننده: به بیان خودتان، مفهوم $\sin x$ را توضیح دهید.

استیو: یافتن سینوس، بستگی به مسئله‌ای دارد که به من داده شـــده است. مثلاً اگر یک مثلث به من داده شده باشد، y را بر r تقسیم می‌کنم. اگر یکی از زاویه‌های خاص مانند ۳۰، ۴۵ یا ۶۰ به من داده شـــده باشـــد، مقدار ســـینوس را حفظ می‌کنم. اگر با مسائل دیگری مواجه شـــوم، با زاویه‌های مرجـــع یا فرمول‌هایی نظیر $\sin\alpha + \cos\alpha = ۱$ [نادرســـت]، آن را حـــل می‌کنم. یعنی پیدا کردن جواب، بستگی به این دارد که مسئله چگونه بیان شده است.

مصاحبه‌کننده : در مـــورد $\sin ۱۷۰$ چه چیزی می‌توانی بگویی؟ می‌توانی یک عدد تقریبی به من بدی؟

استیو: نه ... من به مثلث نیاز دارم. شاید اگر برخی از مقادیر ســـینوس زاویه‌های دیگر یا مثلاً $\cos ۱۷۰$ را به من بدهید، بتوانم مقدار سینوس را بیابم. در غیر این صورت، نیاز به ماشین‌حساب دارم.

پاســـخ‌های اســـتیو، نمونه‌ای معرف از پاسخ‌های چهار دانشجویی بود که با آن‌ها مصاحبه کردم. به نظر می‌رسید که استیو، سینوس و کسینوس را به عنوان الگوریتمی (بر مبنای نسبت‌ها یا مهارت‌های جبری) با داشتن اطلاعاتی مانند مثلث قائم‌الزاویه نام‌گذاری شده، تصور می‌کند. بدون چنین اطلاعاتی، استیو جز در موارد خاص، نمی‌توانســـت تصـــور کند که چگونه عملیات محاسبهٔ سینوس و کسینوس را بر روی یک زاویـــه، انجام دهد. (به دلیل اینکه نمونه مورد مطالعه به یک کلاس محدود می‌شـــد، نتایج آن، نباید به‌طور نامناسب، تعمیم داده شود.)

رویکردی جایگزین به تدریس مثلثات

رویکرد پیشنهادی به آموزش مثلثات، بر این ایده استوار است که اعمال مثلثاتی مانند سینوس، به‌عنوان فرایندی هندسی آموخته شود. یک فرایند برای محاسبهٔ سینوس عبارت است از رسم کردن یک دایرهٔ مثلثاتی به کمک نقاله در صفحهٔ مختصات دکارتی به مرکز مبدأ (محل تقاطع محورها) و شعاع واحد، به گونه‌ای که زاویهٔ مورد نظر، بین نیمه مثبتِ محور x و شعاع دایره است. با مشخص کردن محل برخورد شعاع و دایره، عرض یا بلندی محل تقاطع، مشخص می‌گردد. تحقیقات اخیر در آموزش ریاضی بر این نکته تأکید دارد که دانش‌آموزان/دانشجویان، بدون تجربهٔ به‌کار بردن واقعی یک فرایند در عمل، به سختی می‌توانند آن را تصور کنند. در عوض، دانش‌آموزان ممکن است پس از به کار بردن یک فرایند و بازتاب بر عملِ انجام شده - یعنی به‌کارگیری آن فرایند- فهمشان را از این فرایندها، عمیق‌تر کنند (تال و همکاران، ۲۰۰۰).

در اینجا، تدریسی را شرح می‌دهم که برای آموزش مثلثات در یک درس پیش‌نیاز دانشگاهی طراحی و اجرا کردم (یک نمونه از این طراحی، در پیوست آمده است). برای اینکه دانشجویان را درگیر فعالیت محاسبهٔ سینوس و کسینوس کنم، به هر کدام، یک نقاله و یک دایرهٔ مثلثاتی واحد دادم که روی کاغذ شطرنجی رسم شده بود که در صفحهٔ مختصات دکارتی مدرج، هر ده نقطهٔ علامت زده شده، یک واحد را تشکیل می‌داد. سپس روشی را برای محاسبهٔ سینوس و کسینوس توضیح دادم که با استفاده از نقاله و رسم یک زاویه که رأس آن در مبدأ مختصات، یک ضلع آن در امتداد محور xها و ضلع دیگر آن، جایی باشد که دایره را قطع می‌کند. آن‌گاه به کمک نشانه‌گذاری، طول و عرض نقطهٔ تقاطع تخمین زده شد. این روش در برگه‌هایی که قبل از تدریس به آن‌ها داده بودم، به‌طور کامل توضیح داده شده بود.

دانشجویان به‌صورت گروهی، روی فعالیت‌هایی که به آن‌ها داده بودم کار می‌کردند. در این فعالیت‌ها، آنان مقدار سینوس و کسینوس زاویهٔ داده شده را به کمک این روش، محاسبه نمودند. هنگام انجام فعالیت، بین دانشجویان حرکت می‌کردم تا به سؤال‌های آن‌ها پاسخ دهم و مطمئن شوم که این روش را، درست به کار می‌برند.

بعد از انجام این فعالیت، از دانشجویان خواستم تا مقدار سینوس و کسینوس برخی زاویه‌ها را به کمک این روش، اما بدون به کار بردن آن، تخمین بزنند. به‌طور مثال، آن‌ها توانستند $\sin 270$ را با دریافتن اینکه قسمت پایین محور yها در چه نقطه‌ای دایره واحد را قطع کرده است، محاسبه نمایند. همچنین از دانش‌آموزان خواستم در مورد خروجیِ این روش، بدون به‌کارگیری آن، قضاوت کنند. به‌عنوان نمونه، از آن‌ها خواستم تا تعیین کنند که کدام یک از مقادیر $\sin 23$ و $\sin 37$، بزرگ‌تر است. این فعالیت‌ها به آنان کمک کرد که بتوانند در مورد فرایندها استدلال کرده و در مورد مقادیر سینوس و کسینوس، بدون طی کردن تمام گام‌ها، قضاوت کنند.

در طول کلاس، از چنین درس‌هایی حین تدریس استفاده کردم. به‌طور مثال، دانشجویان یاد گرفتند که سینوس، کسینوس و تانژانت زاویه‌ها را با ساختن یک مثلث قائم‌الزاویه روی صفحهٔ دکارتی، اندازه‌گیری طول اضلاع آن و محاسبهٔ نسبت‌ها، محاسبه کنند. زمانی که دانشجویان این روش را فهمیدند، آن‌ها می‌توانند فعالیت‌هایی نظیر آنچه که در شکل (۱) آمده را، انجام دهند.

اما درک دانشجویان از توابع، محدود به استدلال به کمک نمودارها نبود. زیرا آن‌ها هر زمان که لازم بود، خودشان می‌توانستند این نمودارها را بسازند، طوری که گویی، شخصی مثلث را برایشان ساخته و اندازهٔ ضلع‌ها را به آن‌ها داده است. هنگام مطالعهٔ زاویه‌های مرجع، از دانشجویان خواسته شد تا زاویهٔ مطلوب را رسم نموده، زاویهٔ مرجع مناسب را پیدا کرده و سپس سینوس و کسینوس زاویه را با نگاه کردن به آن، محاسبه کنند. زاویهٔ مرجع به زاویه‌ای گفته می‌شود که زاویهٔ داده شده با محور xها می‌سازد و همواره از 90° کمتر است. توصیف بیشتر این استدلال در وبر (۲۰۰۵) آمده است.

در پایان این کلاس جدید نیز مانند همان کلاسی که روش تدریس مثلثات، مبتنی بر آموزش سنتی و سخنرانی- محور بود که قبلاً توضیح دادم، یک آزمون قلم- کاغذی مشابه از دانشجویان گرفتم. در این آزمون، از ۴۰ نفر که در کلاس بودند، خواستم که $\cos 340$ را تخمین بزنند. نکتهٔ جالب این بود که ۳۷ نفر از ۴۰ نفر، تخمینشان عددی بین ۰/۵ و ۱ بود. وقتی هم که سؤال را برای مقادیری که $\sin x$ نزولی بود پرسیدم، ۳۴ نفر پاسخی دقیق و ۳۲ نفر توجیه قابل قبولی ارائه دادند.

بر مبنای مقایسهٔ پاسخ‌های دانش‌آموزان، با چهار دانش‌آموزی که از توانایی‌های متنوعی برخوردار بودند (یکی بسیارخوب، دو نفر متوسط و یکی که در یادگیری

مثلثات مشـــکل داشـــت) و پاسخ‌هایشـــان، معرفی از پاسخ‌های سایر دانشجویان بود مصاحبه کردم. هر چهار مصاحبه‌شونده، قادر بودند خصوصیات تابع سینوس را با استدلال، در مورد فرایند محاسبهٔ سینوس توضیح دهند. دو گزیده از این مصاحبه‌ها، در زیر آمده است.

مصاحبه‌کننده: چرا $\sin x$ تابع است؟

جان: زیرا برای ... هــر زاویه ... برمی‌گردد به دایره واحد، اگر شما برای سینوس هر مقداری بگذارید، فقط در یک نقطه قطع می‌کند. هر زاویه، فقط به یک زاویه مربوط می‌شود، دایرهٔ واحد را در یک نقطه قطع می‌کند. آن نقطه هم یک مقدار بر روی محور yها دارد. آن نقطه، یک و فقط یک مقدار برای y خواهد داشت.

لازم است توجه شود که جان، برای توجیه اینکه چرا سینوس یک خاصیت مشخص دارد، به فرایند محاسبهٔ ســـینوس رجوع کرد. سه نفر مصاحبه‌شونده دیگر نیز، پاسخ‌های مشابهی داشتند. نکته ارزشمند دیگر این بود که هیچ کدام از چهار مصاحبه‌شونده کلاسی که به روش سنتی مثلثات تدریس شد، نتوانستند دلیلی برای تابع بـــودن $\sin x$ بیاورند. حتی بعد از اینکه به آن‌ها گفته شد که عملی تابع است که به ازای هر ورودی، فقط یک خروجی داشته باشد.

در گزیدهٔ زیر، اریکا قادر بود که با برداشـــتی که از فرایند محاســـبهٔ سینوس داشـــت، مقدار $\sin 170$ را تخمین بزند.

مصاحبه کننده: در مـــورد مقدار $\sin 170$ چه چیزی می‌توانی بگویی؟ آیا می‌توانی تقریبی از این مقدار بدهی؟

اریکا: جواب باید ... ۰/۱ باشه.

مصاحبه‌کننده: حدس خوبیـــه. چطوری به این جواب رسیدی؟

اریکا: به کمک نقاله، زاویه 170° را تصویر کردم تا ببینم کجا، دایره را قطع می‌کند.

مصاحبه‌کننده: فهمیدم. چطوری فهمیدی که در ۰/۱ قطع می‌کند؟

اریکا: [نموداری رســـم کرد]: درســـت اینجا قطع می‌کنه [نقطهٔ برخورد را مشخص کرد.]

در اینجا، اریکا توانســـت نشـــان دهد که چگونه از دانســـته‌هایش در مورد فرایند به کارگرفته در محاسبهٔ ســـینوس ایده گرفت تا مقدار $\sin 170^\circ$ و سینوس هر زاویهٔ دلخواه دیگری را، به دقت و سرعت، تقریب بزند.

این نتایج، تنها برگرفته از کلاســـی است که خودم تدریـــس کـــردم و از ایـــن رو، این امر مهم اســـت که تعمیم‌های نامناسبی از آن‌ها، داده نشود. اما این نتایج، نشان می‌دهد که رویکرد هندسی به مثلثات، می‌تواند در توســـعهٔ فهم یادگیرندگان از عملیات مثلثاتی، مؤثر باشد و پیشنهاد استفاده از این رویکرد در سایر کلاس‌ها می‌شود.

بحث

یافته‌های این تحقیق نشـــان می‌دهد که رویکرد هندسی به تدریس مثلثات بر خلاف رویکردهای سنتی، می‌توانـــد دانش‌آموزان را به فهم و درک اعمال مثلثاتی به مثابه یک تابع، هدایت کند. در این مقاله، وجوه تمایز این رویکرد را از روش‌های متداولی که در بســـیاری از کتاب‌های درسی دبیرستان رایج است، توضیح دادم. اول، تأکید این رویکرد جایگزین، بر انجام دادن فرایند هندسی برای محاسبهٔ سینوس،کســـینوس و تانژانت، به‌صورت عملی اســـت. در حالی‌که بررسی من از روش‌های ارائه شده در چندین کتاب درسی دبیرستانی و دانشگاهی، معلوم نمود که بیشتر آن‌ها، بر فرایند (استفاده از دایرهٔ مثلثاتی)، تنها به‌صورت گذرا اشـــاره کـــرده بودند. در آن کتاب‌ها، بیشـــتر پرســـش‌هایی که از دانش‌آموزان/ دانشجویان خواسته شـــده بود تا آن‌ها را کامل کنند، تقریباً همیشه به شرطی قابل تکمیل هستند که اعمال مثلثاتی، به‌عنوان نسبت در نظر گرفته شوند. دوم اینکه در این رویکرد جایگزین، از دانش‌آموزان/ دانشـــجویان خواسته می‌شود که ابتدا، فرایندها را به صورت فیزیکی انجام دهند و بر عملی که انجام داده‌اند، بازتاب داشـــته باشند. درحالی که کتاب‌های درسی بررسی شده، هیچ کدام از این دو وجه را ارائه نداده‌اند.

یافته‌های این مطالعه، تمایل زیادی در پژوهشـــگر ایجاد نمود که دایرهٔ واحد/ مثلثاتی، نقش برجســـته‌ای در درک بهتر دانش‌آموزان/ دانشـــجویان داشته و دلیل عملکرد خوب آنـــان در رویکردی اســـت که به‌عنوان جایگزین معرفی شد. اما در یک مطالعه که در مقیاس کلان و توسط کندال و استیسی (۱۹۹۷) انجام شد، دو گروه دانش‌آمـــوزان که با مدل مثلث قائم‌الزاویه و مدل دایرهٔ واحد/ مثلثاتی آموزش دیده بودند، با هم مقایسه شـــدند. پژوهشـــگران دریافتند که عملکرد گروه اول، به‌طور چشـــمگیری بهتر از گروه دوم بود. این یافته به وضوح، بیانگر این اســـت که تدریس اعمال مثلثاتی به کمک دایرهٔ مثلثاتی به تنهایی، تضمین‌کنندهٔ یادگیری اصولی مثلثات نیست. در هر حال در مدل استفاده شده

برای تدریـــس این اعمال، دادن فرصت به دانش‌آموزان که سینوس و کسینوس را به‌صورت فرایند درک کنند، بسیار مهم است.

اگر به دانش‌آموزان این فرصت داده شـــود تا به‌طور عملی، فرایند هندســـی را بـــه کار ببرنـــد و روی آن تأمل کنند، می‌فهمند که این اعمال، بســـیار مؤثرتر از آن اســـت که فقط به کمک مثلث قائم‌الزاویه، آموزش داده شـــود. جنبهٔ جذاب رویکرد هندسی این است که اجرای آن، نیازمند تغییـــر افراطی در فرایند تدریس و کلاس را ندارد. به عبارت دیگر، اســـتفاده از این رویکردِ جایگزین، تکنولوژی خاص یا تدریس با کاورزی خاصی را نمی‌طلبد. اجرای ایده‌های توضیح داده شـــده در این مقاله، به معلمان شاغل، فرصتی برای ایجاد یک محیط یادگیری فعال، مشارکتی و عملی می‌دهد و دارای یک توان بالقوه اســـت که به دانش‌آموزان در درک مفاهیم مثلثاتی، کمک کند.

پی‌نوشت‌ها

1. Blackett & Tall
2. Hirsch, Weinhold & Nicholas
3. Hollowell, Shoultz & Ellis
4. Kendal & Stacy
5. Lial, Hornsby & Schneider

منابع

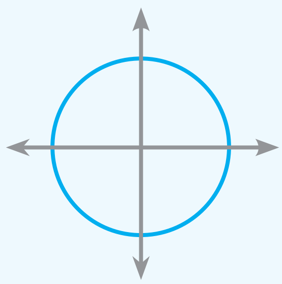
1. (NCTM), N. C. (2005). *Principles and standards for school Mathematics*. Reston: VA: NCTM.
2. 1. (NCTM), (2000). *Principles and standards for school Mathematics*. Reston: VA: NCTM.
3. Blackett, N. D. & Tall, D. O. (1991). Gender and the versatile Learning of Trigonometry Using Computer Software. *In Proceedings of the 15th Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 1*, (pp. 51-144). Assisi,Italy.
4. Hirsch, C. R., Weinhold, M. & Nichols, C. (1991). Trigonometry Today. *Mathematics Teacher* 84,No. 2, 98-106.
5. Hollowell, K. A., Schoultz, J. E. & Ellis, W. (1997). *HRW Geometry*. Austin, TX:Holt, Rinehart , and Winston.
6. Kendal, M. & Stacey k. (1997). Teaching Trigonometry. *Vinculum* 34, No. 2, 4-8.
7. Lial, M. L., Hornsby, J. & Schneider, D. I. (2001). *College Algebra and Trigonometry*. Menlo Park, CA: Addision Welesley.
8. Tall, D. O., Thomas, M., Davis. G., Gray, E. & Simpson, A. (2000). What Is the Object of the Encapsulation of a Process? *Journal of Mathematical Behavior* 18, No. 2, 1-19.
9. Weber, k. (2005). Students'Understanding of Trigonometric Functions. *Mathematic Education Reseach Journal* 17, No. 3, 94-115.

منبعی که ترجمهٔ آن ارائه شده، مقاله زیر است:
Weber, Keith. (2008). Teaching Trigonometric Functions: lessons Learned from Research. Mathematics Teacher; Vol. 102, No. 2; 144- 155. National Council of Teachers of Mathematics: NCTM.

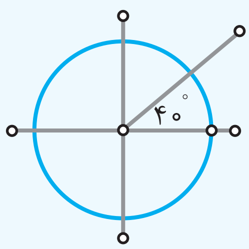
پیوست

محاسبهٔ سینوس و کســـینوس با استفاده از دایرهٔ واحد(مثلثاتی)

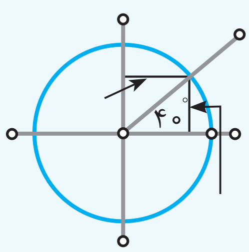
۱. یک دایرهٔ واحد در یک صفحهٔ مختصات دکارتی، رســـم کنید. شـــعاع دایرهٔ واحد ۱ و مرکـــز آن، مبدأ مختصات است.



۲. با استفاده از پرگار، یک زاویه در ربع اول بسازید که یک ضلعش، محور xها باشد. در این شکل، یک زاویهٔ ۴۰ درجه نشان داده شده است.



۳. نقطهٔ تقاطع شـــعاع را با زاویه‌ای که الان رســـم کردید، مشخص کنید تا دایرهٔ واحد و زاویه، کامل شوند. با استفاده از خط‌کش یا کاغذ شطرنجی، مختصات نقطهٔ تقاطع را پیدا کنید. طول نقطه (مقدار x)، کســـینوس زاویه‌ای است که رسم کردید و عرض نقطه (مقدار y)، سینوس آن زاویه است. در این حالت، سینوس زاویهٔ ۴۰ درجه حدود ۰/۶۵ و کسینوس زاویه ۴۰ درجه، حدود ۰/۷۵ است.



تمرین‌های کلاسی

۱. مقدار سینوس و کسینوس زاویه‌های زیر را با استفاده از خط‌کش و پرگار، به دست آورید.

الف) سینوس و کسینوس زاویهٔ ۳۰ درجه

ب) سینوس و کسینوس زاویهٔ ۱۷۰ درجه

پ) سینوس و کسینوس زاویهٔ ۱۲۰ درجه

ت) سینوس و کسینوس زاویهٔ ۲۶۰ درجه

ث) سینوس و کسینوس زاویهٔ ۸۰ درجه

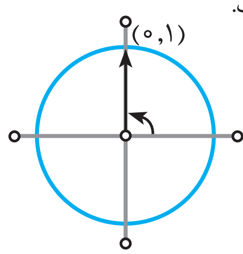
ج) سینوس و کسینوس زاویهٔ ۳۲۵ درجه

۲. بدون محاسبهٔ دقیق (یعنی بدون استفاده از خط‌کش و پرگار)، مقدار سینوس و کسینوس زاویه‌های زیر را به دست آورید.

برای شروع، اولین را خودم انجام می‌دهم.

الف) سینوس و کسینوس زاویهٔ ۹۰ درجه (نمودار زیر را نگاه کنید.)

توضیح: یک زاویهٔ ۹۰ درجه، زاویهٔ قائمه است. من یک زاویهٔ ۹۰ درجه داخل یک دایرهٔ واحد رسم می‌کنم. این زاویه، دایرهٔ واحد را در بالای دایره قطع می‌کند. مختصات نقطهٔ تقاطع، (۰,۱) است. پس $\sin 90 = 1$ و $\cos 90 = 0$ است.



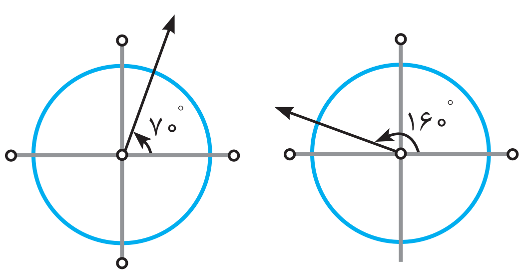
ب) سینوس و کسینوس ۰ درجه

پ) سینوس و کسینوس ۱۸۰ درجه

ت) سینوس و کسینوس ۲۷۰ درجه

ث) سینوس و کسینوس ۳۶۰ درجه

۳. مقدار سینوس و کسینوس زاویه‌هایی را که در نمودار زیر رسم شده‌اند، تقریب بزنید.



۴. بدون انجام محاسبات، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید و برای آن‌ها، دلیل بیاورید.

الف) مقدار سینوس ۱۴۰ درجه، مثبت است یا منفی؟ (راهنمایی: یک دایرهٔ واحد رسم کنید و یک زاویهٔ ۱۴۰ درجه را به طور تقریبی، رسم کنید.)

ب) مقدار کسینوس ۲۰۰ درجه، مثبت است یا منفی؟

پ) سینوس ۲۳ درجه بزرگ‌تر است یا سینوس ۳۷ درجه؟

ت) کسینوس ۳۰۰ درجه بزرگ‌تر است یا کسینوس ۳۳۰ درجه؟

سؤال‌هایی برای تکلیف منزل

۱. با استفاده از دایرهٔ واحد و پرگار، مقدار سینوس و کسینوس زاویه‌های زیر را محاسبه کنید:

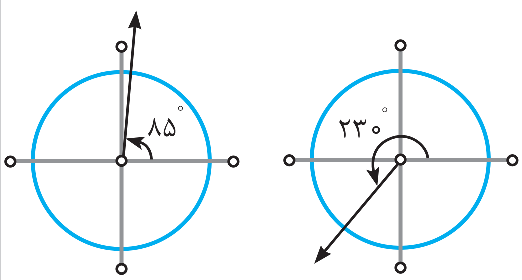
الف) سینوس و کسینوس ۵۰ درجه

ب) سینوس و کسینوس ۱۲۷ درجه

پ) سینوس و کسینوس ۲۰۰ درجه

ت) سینوس و کسینوس ۳۰۰ درجه

۲. مقدار سینوس و کسینوس زاویه‌های رسم شده در نمودار زیر را تقریب بزنید.



۳. بدون انجام محاسبه، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید. برای پاسخ‌های خود، دلیل بیاورید.

الف) سینوس ۲۴۰ درجه، مثبت است یا منفی؟ (راهنمایی: یک دایرهٔ واحد رسم کنید و زاویهٔ ۲۴۰ درجه را به طور تقریبی، رسم کنید.)

ب) کسینوس ۳۰۰ درجه مثبت است یا منفی؟

پ) سینوس ۱۳۰ درجه بزرگ‌تر است یا سینوس ۱۴۷ درجه؟

ت) کسینوس ۳۰ درجه بزرگ‌تر است یا کسینوس ۲۳۰ درجه؟

۴. در کدام ربع صفحهٔ مختصات، مقدار $\sin x$ مثبت است؟ در کدام ربع صفحهٔ مختصات، مقدار $\cos x$ مثبت است؟

۵. می‌توانید زاویه‌ای پیدا کنید که $\sin x = 2$؟ اگر جواب مثبت است، آن درجه کدام است؟ اگر نتوانستید چنین زاویه‌ای پیدا کنید، علتش چه بوده است؟